

שיטת כמותיות

פרק 7 - אלגברת ליניארית - דמיון מטריצות

תוכן העניינים

1.....
1. דמיון מטריצות.....

דמיון מטריצות

שאלות

1) ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכיחו כי :

א. $|A| = |B|$

ב. $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. $L^{-1}A$ ו- B אותו פולינום אופיני.

2) הוכיחו באינדוקציה : אם $A^n = PB^nP^{-1}$, $P^{-1}AP = B$, אז

3) ענו על השעיפים הבאים :

א. ידוע כי A מטריצה ממשית מסדר n וידוע כי A דומה למטריצה $4A$.
הוכיחו כי A מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות דומות.

4) נתונות שתי מטריצות ממשיות :
 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$

האם קיימים קבועים ממשיים a, b , כך שהמטריצה A דומה למטריצה B ?

5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר n : A, B, C . הוכיחו כי :

א. A דומה לעצמה.

ב. אם A דומה ל- B , אז B דומה ל- A .

ג. אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .

ד. אם A דומה ל- B ושתיهن הפיכות, אז A^{-1} דומה ל- B^{-1} .

ה. אם A דומה ל- B , אז A^k דומה ל- B^k , לכל k טבעי.

ו. אם A דומה ל- B ו- $q(x)$ פולינום, אז $q(A)$ דומה ל- $q(B)$.

ז. אם A דומה ל- B , אז A^T דומה ל- B^T .

ח. אם A דומה ל- B , אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

ט. אם A דומה ל- B , אז $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$.

הערה . $Ax = 0$ – מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית

6) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.
- ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.
- ג. אם לשתי מטריצות אותן פולינום אופייני ואיתו פולינום מינימלי אז הן דומות.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) ידוע שלמטריצה ריבועית A מסדר 3 יש ערכים עצמיים $0, 1$ ו- 2 .
חשבו כל אחד מה הבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

- א. $\text{rank}(A)$
- ב. $\dim \text{Ker}(A)$
- ג. $\text{tr}(A)$
- ד. $|A^T A|$
- ה. ע"ע עבור $A^T A$.
- ו. ע"ע עבור $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$.

$$\text{הערה: } \dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$$

8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותן פולינום מינימלי.

9) ענו על השעיפים הבאים :

- א. A ו- B שתי מטריצות הדומות למטריצה C .
הוכיחו כי A דומה ל- B .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

10) עבור אילו ערכים של x המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

11) הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12) נתונות שתי מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

נתון כי A ניתנת לכלסן.

הוכיחו :

דומה ל- A אם ורק אם B ניתנת לכלסן והוא בעלת אותם ע"י כמו של A .

$$\text{. } a, b \in \mathbb{R}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ ו- } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{13) נתונות המטריצות}$$

עבור אילו ערכי a ו- b המטריצות A ו- B דומות?

$$\text{. } a \in \mathbb{R}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ו- } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{14) נתונות המטריצות}$$

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = B$

$$\text{. } B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ו- } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \quad \text{15) נתונות המטריצות}$$

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה P , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

16) תהינה A, B מטריצות ב- $(\mathbb{R})^n, n$, בעלות דרגה 1, וכן, כאשר

k מספר ממשי שונה מ- 0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של A ו- B .

ב. הוכיחו ש- A ו- B דומות.

17) תהי A מטריצה מסדר 3×3 עם פולינום אופיני $p(t) = (t-1)(t+4)^2$, ונמצא כי $\rho(4I + A) = 1$.

א. רשמו את הפולינום האופיני של A^2 .

ב. הוכחו שהמטריצה $I - 10A + 9I = A^4$ לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת $(A^4 - 10A + 9I)x = 0$.

18) נתון כי $[A, B, C, D] \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- A -דומה ל- B ו- C -דומה ל- D . הוכחו או הפריכו:

א. $A+C$ דומה ל- $B+D$.

ב. AC דומה ל- BD .

19) הוכחו או הפריכו:

א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.

ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

20) ענו על השעיפים הבאים:

א. הוכחו: אם A דומה ל- B אז $A - kI$ דומה ל- $B - kI$.

ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

21) נתון כי A ו- B מטריצות דומות. הוכחו של- A ו- B אותן ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

22) תהי A מטריצה ממשית מסדר 7×7 , בעלת דרגה 4.

נתון שהפולינום $t^4 - 7t^2 + 10 = q(t)$ מחלק את הפולינום האופיני $p(t)$ של A . מצאו את הפולינום האופיני של A .

א. הוכחו ש- A לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.

ב. מצאו את $\text{tr}(A^2)$.

. $A, B \in M_n(R)$ **(23)** נתונות שתי מטריצות

הוכיחו או הפריכו :

- א. אם $I + B$ דומה ל- $-A$ אז A^2 דומה ל- B^2 .
- ב. אם ל- A ול- B אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

תשובות סופיות

- (1)** שאלת הוכחה.
- (2)** שאלת הוכחה.
- (3)** שאלת הוכחה.
- (4)** לא.
- (5)** שאלת הוכחה.
- (6)** שאלת הוכחה.
- (7)** א. $\frac{1}{15}, \frac{1}{37}$ ב. לא ניתן לחשב. ג. 0 ד. 3 ה. לא ניתן לחשב.
- (8)** שאלת הוכחה.
- (9)** שאלת הוכחה.
- (10)** $x = 0$
- (11)** שאלת הוכחה.
- (12)** שאלת הוכחה.
- (13)** $a = 0 - 1, b = -2$
- (14)** כן, עבר ± 2
- (15)** המטריצות דומות ו- P מטריצה שהאלכסון המשני שליה 1 ושאר האיברים 0.
- (16)** א. $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$ ב. שאלת הוכחה.
- (17)** א. $p(x) = (x-1)(x-16)^2$ ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.
- (18)** שאלת הוכחה.
- (19)** שאלת הוכחה.
- (20)** א. שאלת הוכחה. ב. לא דומות. ג. לא דומות.
- (21)** שאלת הוכחה.
- (22)** א. $tr(A^2) = 14$ ב. $D = diag(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$
- (23)** שאלת הוכחה.